Zbornik radova 10. Međunarodne konferencije o nastavi fizike u srednjim školama,
Aleksinac, 24-26. mart 2023.

Kosi hitac i zakon održanja mehaničke energije

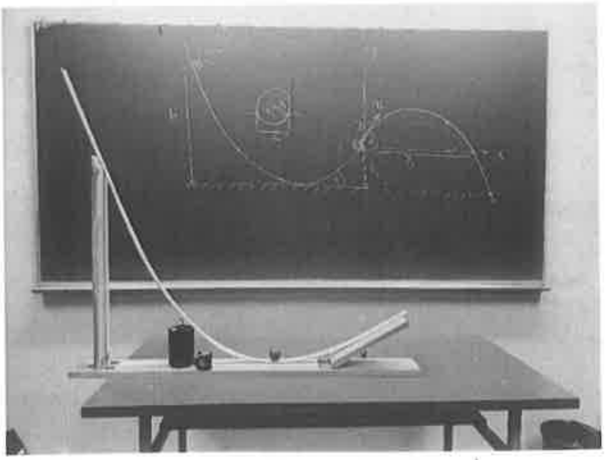
Sonja Kovačević[1], Marko M. Milošević[2], Ljubica Kuzmanović[2], Milan S. Kovačević[2]
[1]Prva kragujevačka gimnazija, Kragujevac, Srbija
[2]Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, Kragujevac, Srbija

Apstrakt. U radu je opisan jedan eksperiment za proučavanje kretanja tela u polju Zemljine teže. Eksperiment uključuje merenje dometa D i ugla α pod kojim je telo izbačeno u odnosu na horizontalnu ravan. Primenom kinematičkih jednačina izračunava se vrednost intenziteta početne brzine hica v_0. Ovaj rezultat se upoređuje vrednošću v_0 koja se dobija primenom zakona održanja energije. U analizi su razmatrana dva modela: prvi model uzima u obzir samo translatorno kretanje kuglice niz žleb bez trenja, dok drugi model uzima u obzir i rotaciju kuglice. Pokazuje se da je drugi model adekvatniji uz dodatnu korekciju koja podrazumeva računanje sa efektivnim radijusom rotacije kuglice zbog samog profila žleba. Eksperiment se može koristiti pri izučavanju sadržaja iz više nastavnih jedinica (npr. kretanje tela u polju sile Zemljine teže, kinetička energija translacije, kinetička energija rotacije, zakon održanja mehaničke energije i dr.).

Ključne reči: kosi hitac, energija.

KOSI HITAC: ZAKONI POLOŽAJA I BRZINE

Ako se telo baci sa zemlje ili sa neke visine, brzinom koja sa horizontalom zaklapa neki oštar ugao, onda kretanje koje nastaje zove se kosi hitac (slika 1).



SLIKA 1. Postavka eksperimenta.

Ukoliko se zanemari otpor vazduha, zakoni položaja i brzine određuju koordinate tela i komponente brzine u proizvoljnom trenutku t. U koordinatnom sistemu predstavljenom na slici 1. zakoni položaja i brzine su: $x = v_{0x}t$, $y = v_{0y}t - gt^2/2$, $v_x = v_{0x}$ i $v_y = v_{0y} - gt$, gde su v_{0x} i v_{0y} komponente početne brzine tela. Uz pomoć ovih jednačina mogu se odrediti sve karakteristike kretanja, na primer: vreme kretanja tela do najviše tačke $t = v_{0y}/g$; maksimalna visina tela $h \quad {}^{2}_{0y_{max}}$; vreme kretanja tela do pada na zemlju $t = 2v_{0y}/g$; brzina tela u bilo kom trenutku $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; domet tela $D = 2v_{0x}v_{0y} = v_0^2 \, sin\, 2\,\alpha/g$. Više detalja oko izvođenja ovih jednačina i njihovog rešavanja nalazimo u radovima [1-7].

Eksperiment: Kuglica prečnika *2R* se pusti sa visine *H* niz žleb širine *L* (slika 1), i meri se domet hica *D*. U našem eksperimentu, koristili smo kuglicu koja dodiruje ivice žleba samo u dve tačke, tj *2R>L* (tabela 1). Primenom formule za domet koja sledi iz kinematičkih jednačina $v_0 = \sqrt{gD/\, sin\, 2\,\alpha}$, izračunata je vrednost za početnu brzinu v_0=2,48 m/s za elevacioni ugao od 19,5^0. Vrednost brzine v_0 se kasnije upoređuje sa brzinom centra mase kuglice v_{CM} koja se izračunava na osnovu zakona održanja energije.

Model 1: Kada se kuglica mase *m* nalazi na visini *H* iznad površine stola, njena potencijalna energija u odnosu na površinu stola iznosi *mgH.* U trenutku napuštanja žleba, njena potencijalna energija je *mgh* kinetička energija $mv_0^2/2$ (uzima se da je $v_0 = v_{CM}$, gde je v_{CM} brzina centra mase kuglice). Ovo odgovara klizanju kuglice bez trenja. U ovom slučaju zakon održanja mehaničke energije zapisujemo u obliku

$$mgH = mgh + \frac{mv_{CM}^2}{2} \tag{1}$$

odakle nalazimo $v_{CM} = \sqrt{2g(H-h)}$. Ako je visina *H=0,7*m, *h*=0,13 m , vrednost početne brzine kuglice (kosog hica) u ovom modelu, iznosi v_{CM}=3,34 m/s. Upoređivanjem ovog rezultata sa rezultatom koji je dobijen iz kinematičkih jednačina, nalazimo $(v_{CM} - v_0)/v_0 = 34{,}8\%$. Zaključujemo da model klizanja kuglice niz žleb strme ravni nije adekvatan za određivanje početne brzine kada se razmatra kosi hitac. Kao unapređenje ovog modela može nam poslužiti sledeći primer.

Model 2: Ovaj model uzima u obzir i rotaciju kuglice dok se kreće niz žleb strme ravni, tj. energija rotacije $E_{rot} = I\omega^2/2$ gde je $I = 2mR^2/5$ - moment inercije kuglice mase *m* i poluprečnika *R* u odnosu na osu rotacije koja prolazi kroz njen centar, ω je ugaona brzina. Kada se uzme u obzir i rotacija kuglice, zakon održanja mehaničke energije možemo zapisati u obliku:

$$mgH = mgh + \frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\omega^2 \tag{2}$$

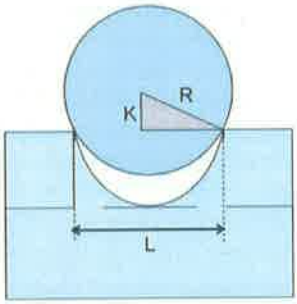
gde je $v_{CM} = \omega R$, odnosno $\omega = v_{CM}/R$. Rešavanjem jednačine (2) dobija se izraz za početnu brzinu hica $v_{CM} = \sqrt{10g(H-h)/7}$. Uzimajući vrednosti za *g, H,* i *h* (Tabela 1), nalazimo vrednost za početnu brzinu $v_{CM} = 2{,}83$ m/s. Primenom analogne procedure, dobijamo sledeću vrednost za relativno odstupanje $(v_{CM} - v_0)/v_0 = 14\%$. Vidimo da je relativno odstupanje, u odnosu na rezultat koji sledi iz kinematičkih jednačina, dosta manje u poređenju sa rezultatom u modelu 1. U slučaju kada kuglica dodiruje žleb samo u dve tačke, dalje unapređenje modela se može dobiti uzimanjem efektivnog radijusa rotacije kuglice, što je opisano usledećem primeru.

Model 3: Kada se kuglica radijusa *R* kreće niz žleb širine *L*, pre nego što pređe u formu kretanja kosog hica, kuglica dodiruje ivice žleba samo u dve tačke (slika 2). Sa slike 2 nalazimo da je $K = (R^2 - L^2/4)^{1/2}$. Dakle, u jednačini (2) u izrazu za ugaonu brzinu ω umesto *R* treba uzeti efektivni radijus rotacije kuglice *K.* U ovom slučaju zakon održanja mehaničke energije zapisujemo u obliku

$$mgH = mgh + \frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v_{CM}^2}{K^2} \tag{3}$$

odakle izvodimo izraz za brzinu v_{CM}

$$v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1+\frac{2}{5\left[1-(L/2R)^2\right]}}}.$$



Slika 2. Efektivni radijus *K* rotacije kuglice.

Uzimanjem vrednosti za *R* i *L* (iz tabele 1) nalazimo da je $v_{\mathrm{CM}} = 2{,}66\mathrm{m/s}$. Kada se izračuna relativno odstupanje u odnosu na rezultat koji sledi iz kinematičkih jednačina, nalazimo da je $(v_{\mathrm{CM}} - v_0)/v_0 = 7{,}2\%$. Ovo odstupanje je najmanje, i ovaj model se pokazao kao najadekvatniji u izračunavanju početne brzine kuglice (kosog hica) kada se ona izračunava primenom zakona održanja energije, za kuglici koja dodiruje žleb samo u dve tačke (slika 2).

TABELA 1. Numeričke vrednosti dobijene merenjem i računanjem

H (m)	*h* (m)	*D* (m)	*R* (m)	*L* (m)	Brzina kuglice (početna brzina za *HH*)	
0,7	0,13	0,394	0,0239	0,0188	v_0 (m/s)	$\frac{v_{\mathrm{CM}}-v_0}{v_0}$ (%)
Rezultat koji se dobija iz kinematičkih jednačina					2,48	
Zakon održanja mehaničke energije: *Model 1*					3,34	34,8
Zakon održanja mehaničke energije: *Model 2*					2,83	14
Zakon održanja mehaničke energije: *Model 3*					2,66	7,2

ZAKLJUČAK

Pristup opisan u ovom eksperimentu ima dva izazova za učenike: merenje u realnom vremenu i obezbeđivanje da se kuglica pušta uvek sa istog položaja u odnosu na površinu stola. Kontinuirano variranje ugla nagiba lansirne rampe (žleba strme ravni) izaziva promenu normalne sile *N* a samim tim i sile trenja. Tada jednačine kretanja postaju nelinearne i analitička rešenja nisu dostupna, što prevazilazi okvire gradiva koje se izučava u gimnazijama.

LITERATURA

1. N. Čaluković, Fizika 1 za prvi razred matematičke gimnazije, (Krug, Beograd 2005) pp. 73-80.

2. D. Halliday, R. Resnick, Foundamentals of Physics 2nd Ed (John Weiley & Sons, Inc 1986) pp.46-51
3. T. de Alwis, Projectile motion with Mathematica, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **31**, 749–755 (2000).
4. H. Erlichson, Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf. *American Journal of Physics* **51**, 357–362 (1983).
5. P. J. Brancazio, Trajectory of a fly ball, *The Physics Teacher* **23**, 20–23 (1985).
6. S. M. Stewart, An analytic approach to projectile motion in a linear resisting medium, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **37** 411-431 (2006).
7. D. A. Morales, A generalization on projectile motion with linear resistance, *Can. J. Phys.* **89** 1233-1250 (2011).

Dodatak

Usled dejstva otpora, putanja kosog hica će biti ispod teorijske putanje određene zanemarivanjem otpora vazduha, i biće asimetrična. Otpor vazduha, sila $\vec{F}_D$, ima pravac brzine a suprotan smer. Diferencijalne jednačine kretanja se dobijaju projektovanjem vektorske jednačine $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_D$ na *x* i *y* osu:

$$m\ddot{x} = -F_D \cos\beta,\ m\ddot{y} = -mg - F_D \sin\beta$$

gde je $\cos\beta = \dot{x}/v$ i $\sin\beta = \dot{y}/v$. Sila otpora sredine najčešće je linearna funkcija brzine, tj.$F_D = cv$, *c=const*. Konačno, rešenja su

$$x = \frac{k}{g} v_0 \cos\alpha \left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right),\ y = \frac{k}{g}(v_0 \sin\alpha + k)\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right) - kt$$

gde je $k = mg/c$. Komponente brzina su

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{gt}{k}}, y = (v_0 \sin\alpha + k)\left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right) - k$$

a njihove granične vrednosti su $\dot{x}_{gr} = 0$, $\dot{y}_{gr} = -k$ kada $t \to \infty$. Dakle, konstanta *k* predstavlja graničnu vrednost brzine i može se smatrati da se posle određenog vremena telo praktično kreće vertikalno naniže konstantnom brzinom *k*. Ako se u izrazu za $F_D$zameni granična vrednost brzine, dobija se $F_D = cv_{gr} = mg$, što pokazuje da se sila otpora izjednačila sa težinom i rezultantna sila koja na telo dejstvuje jednaka je nuli.